Das Cross-Section-Theorem und nicht-mehrdeutige Transducer

Seminar Automatentheorie

Johannes Gilger

Lehrstuhl i7 RWTH Aachen

Aachen, 18. März 2010

Motivation

- Rationale Relationen

Motivation

- Rationale Relationen
  - Mächtige Klasse von Wortrelationen

Motivation

- Rationale Relationen
  - Mächtige Klasse von Wortrelationen
  - Wortersetzungssysteme (infix,prefix,suffix) / Worttransformationen

Motivation

- Rationale Relationen
  - Mächtige Klasse von Wortrelationen
  - Wortersetzungssysteme (infix,prefix,suffix) / Worttransformationen
  - Werden von Transducern erkannt

Motivation

- Rationale Relationen
  - Mächtige Klasse von Wortrelationen
  - Wortersetzungssysteme (infix,prefix,suffix) / Worttransformationen
  - Werden von Transducern erkannt
  - Äquivalenz- und Inklusionsproblem i.A. unentscheidbar

Motivation

- Rationale Relationen
  - Mächtige Klasse von Wortrelationen
  - Wortersetzungssysteme (infix,prefix,suffix) / Worttransformationen
  - Werden von Transducern erkannt
  - Äquivalenz- und Inklusionsproblem i.A. unentscheidbar
- Rationale Funktionen

Motivation

- Rationale Relationen
  - Mächtige Klasse von Wortrelationen
  - Wortersetzungssysteme (infix,prefix,suffix) / Worttransformationen
  - Werden von Transducern erkannt
  - Äquivalenz- und Inklusionsproblem i.A. unentscheidbar
- Rationale Funktionen
  - Ausreichend für viele Zwecke (sequentielle Maschinen, Bimaschinen)

Motivation

- Rationale Relationen
  - Mächtige Klasse von Wortrelationen
  - Wortersetzungssysteme (infix,prefix,suffix) / Worttransformationen
  - Werden von Transducern erkannt
  - Äquivalenz- und Inklusionsproblem i.A. unentscheidbar
- Rationale Funktionen
  - Ausreichend für viele Zwecke (sequentielle Maschinen, Bimaschinen)
  - Äquivalenz und Inklusion entscheidbar

Motivation

- Rationale Relationen
  - Mächtige Klasse von Wortrelationen
  - Wortersetzungssysteme (infix,prefix,suffix) / Worttransformationen
  - Werden von Transducern erkannt
  - Äquivalenz- und Inklusionsproblem i.A. unentscheidbar
- Rationale Funktionen
  - Ausreichend für viele Zwecke (sequentielle Maschinen, Bimaschinen)
  - Äquivalenz und Inklusion entscheidbar
  - Entscheidbar ob eine rat. Relation eine rat. Funktion ist

Motivation

- Rationale Relationen
  - Mächtige Klasse von Wortrelationen
  - Wortersetzungssysteme (infix,prefix,suffix) / Worttransformationen
  - Werden von Transducern erkannt
  - Äquivalenz- und Inklusionsproblem i.A. unentscheidbar
- Rationale Funktionen
  - Ausreichend für viele Zwecke (sequentielle Maschinen, Bimaschinen)
  - Äquivalenz und Inklusion entscheidbar
  - Entscheidbar ob eine rat. Relation eine rat. Funktion ist
  - **Darstellbar durch eindeutige Transducer**

Das zugrundeliegende Buch

J. Berstel
Transductions and Context-Free Languages
Teubner Verlag, 1979

Das zugrundeliegende Buch

J. Berstel
Transductions and Context-Free Languages
Teubner Verlag, 1979

Wichtige Sätze aus

S. Eilenberg
Automata, Languages, and Machines, vol. A
Academic Press, New York, 1974

Rationale Relationen, vom Aufbau wie reguläre Sprachen.

Rationale Relationen, vom Aufbau wie reguläre Sprachen.

Beispiel

Seien $A = \{a\}$ und $B = \{b, c\}$ Alphabete. Eine rationale Relation über $A^* \times B^*$ ist z.B.:

$$(aa, bb)^* + (a, c)(aa, cc)^*$$

Rationale Transduktionen sind nur eine andere Art und Weise rationale Relationen aufzufassen. Statt Teilmengen von $A^* \times B^*$: Transduktion ("Übersetzung") von A^* nach B^*.

Rationale Transduktionen sind nur eine andere Art und Weise rationale Relationen aufzufassen. Statt Teilmengen von $A^* \times B^*$: Transduktion ("Übersetzung") von A^* nach B^*.

Formal

Eine *rationale Transduktion* T von A^* nach B^* ist eine Abbildung von A^* in die Menge $\mathcal{P}(B^*)$, deren Graph eine rationale Relation ist.

Transducer (in der Ausarbeitung: Transduktoren) sind die Maschinen die *rationale* Transduktionen realisieren.

Transducer (in der Ausarbeitung: Transduktoren) sind die Maschinen die *rationale* Transduktionen realisieren.

Formale Definition

Ein *Transducer* $\tau = \langle A, B, Q, q_-, Q_+, E \rangle$ besteht aus

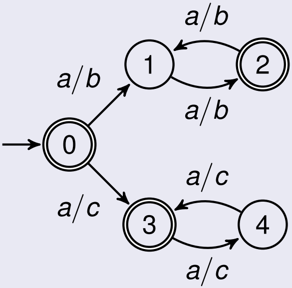
- Eingabealphabet A
- Ausgabealphabet B
- endlicher Zustandsmenge Q
- Startzustand $q_- \in Q$
- Menge aus Endzuständen $Q_+ \subseteq Q$

und einer endlichen Menge

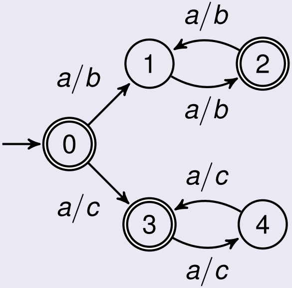
$$E \subseteq Q \times A^* \times B^* \times Q$$

von Transitionen.

Transducer - Beispiel



Transducer - Beispiel



Der Transducer über die Sprache
$\{(a^n, b^n) \mid n \text{ gerade}\} \cup \{(a^n, c^n) \mid n \text{ ungerade}\}$.

Definition

Definition

Eine *rationale Funktion* $\alpha : A^* \longrightarrow \mathcal{P}(B^*)$ ist eine rationale Transduktion, so dass $|\alpha(w)| \leq 1$ für alle $w \in A^*$.
Wir schreiben: rationale Funktion $\alpha : A^* \longrightarrow B^*$.

Definition

Eine *rationale Funktion* $\alpha : A^* \to \mathcal{P}(B^*)$ ist eine rationale Transduktion, so dass $|\alpha(w)| \leq 1$ für alle $w \in A^*$.
Wir schreiben: rationale Funktion $\alpha : A^* \to B^*$.

Entscheidungsprobleme

Definition

Eine *rationale Funktion* $\alpha : A^* \longrightarrow \mathcal{P}(B^*)$ ist eine rationale Transduktion, so dass $|\alpha(w)| \leq 1$ für alle $w \in A^*$.
Wir schreiben: rationale Funktion $\alpha : A^* \longrightarrow B^*$.

Entscheidungsprobleme

- Inklusionsproblem entscheidbar (für rationale Relationen i.A. nicht)

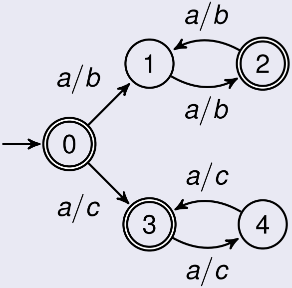
Definition

Eine *rationale Funktion* $\alpha : A^* \longrightarrow \mathcal{P}(B^*)$ ist eine rationale Transduktion, so dass $|\alpha(w)| \leq 1$ für alle $w \in A^*$.
Wir schreiben: rationale Funktion $\alpha : A^* \longrightarrow B^*$.

Entscheidungsprobleme

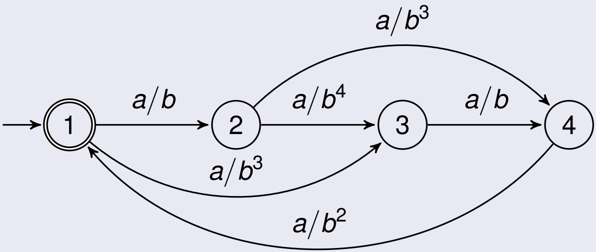
- Inklusionsproblem entscheidbar (für rationale Relationen i.A. nicht)
- Dann natürlich auch: Äquivalenzproblem entscheidbar

Beispiel 1

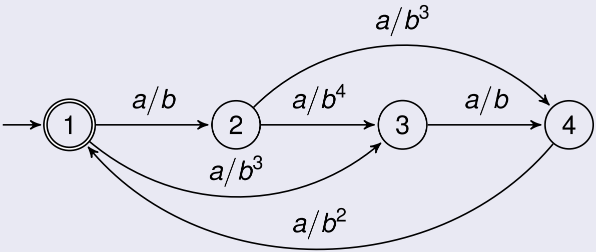


Der Transducer über die Sprache
$\{(a^n, b^n) \mid n \text{ gerade}\} \cup \{(a^n, c^n) \mid n \text{ ungerade}\}$.

Beispiel 2

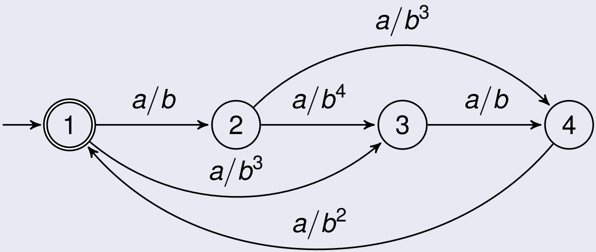


Beispiel 2



Transducer realisiert auch rationale Funktion.

Beispiel 2



Transducer realisiert auch rationale Funktion.
Erkennt die Sprache: $\left((a^3, b^6) + (a^4, b^8)\right)^*$.

Definition

Definition

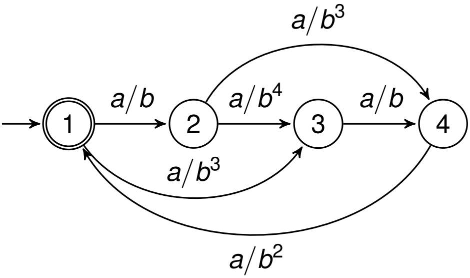
Ein Transducer τ ist *nicht-mehrdeutig* (”unambigious”), falls er (1) und (2) erfüllt und jedes Wort $w \in A^*$ der akzeptierende Lauf für höchstens einen Pfad e in τ ist.

Definition

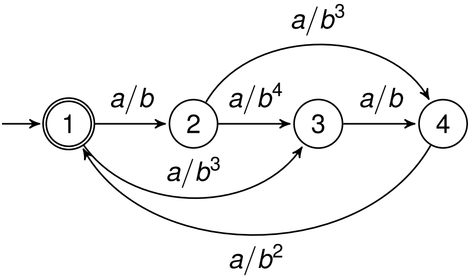
Ein Transducer τ ist *nicht-mehrdeutig* ("unambigious"), falls er (1) und (2) erfüllt und jedes Wort $w \in A^*$ der akzeptierende Lauf für höchstens einen Pfad e in τ ist.

$$E \subseteq Q \times A \times B^* \times Q \tag{1}$$

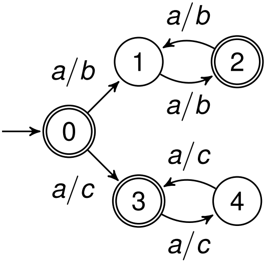
$$(p, a, w, q), (p, a, w', q) \in E \implies w = w' \tag{2}$$



(a) Mehrdeutig (obwohl (1) und (2) erfüllt)



(c) Mehrdeutig (obwohl (1) und (2) erfüllt)



(d) Nicht-mehrdeutig

Zu zeigen

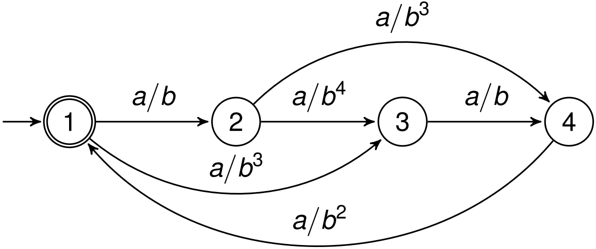
Zeigen dass rationale Funktionen und nicht-mehrdeutige Transducer äquivalent sind.

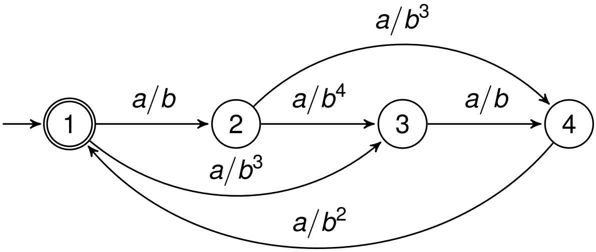
Zu zeigen

Zeigen dass rationale Funktionen und nicht-mehrdeutige Transducer äquivalent sind.

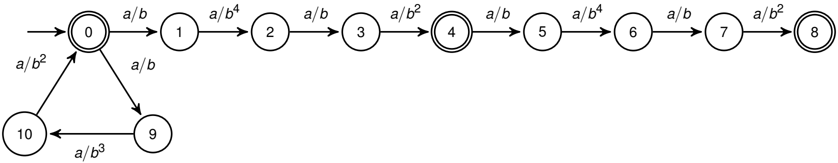
Konstruktion

Eine Methode zeigen um rationale Funktionen in Form eines nicht-mehrdeutigen Transducers zu überführen.


a/b
a/b^4
a/b
a/b^3
a/b^3
a/b^2
1
2
3
4



a/b
a/b^4
a/b
a/b^3
a/b^3
a/b^2
1
2
3
4



a/b
a/b^4
a/b
a/b^2
a/b
a/b^4
a/b
a/b^2
a/b^2
a/b
a/b^3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Verschiedene Homomorphismen über Alphabeten

Verschiedene Homomorphismen über Alphabeten

Seien A, B Alphabete und $\alpha : A^* \longrightarrow B^*$ ein Homomorpismus. Dann nennt man α

Verschiedene Homomorphismen über Alphabeten

Seien A, B Alphabete und $\alpha : A^* \longrightarrow B^*$ ein Homomorpismus. Dann nennt man α

- *alphabetisch*, falls $\alpha(A) \subseteq B \cup \{\varepsilon\}$.

Verschiedene Homomorphismen über Alphabeten

Seien A, B Alphabete und $\alpha : A^* \longrightarrow B^*$ ein Homomorpismus. Dann nennt man α

- *alphabetisch*, falls $\alpha(A) \subseteq B \cup \{\varepsilon\}$.
- *strikt alphabetisch*, falls $\alpha(A) \subseteq B$.

Verschiedene Homomorphismen über Alphabeten

Seien A, B Alphabete und $\alpha : A^* \longrightarrow B^*$ ein Homomorpismus. Dann nennt man α

- *alphabetisch*, falls $\alpha(A) \subseteq B \cup \{\varepsilon\}$.
- *strikt alphabetisch*, falls $\alpha(A) \subseteq B$.
- eine *Substitution*, falls α eine Abbildung $\alpha : A^* \longrightarrow \mathcal{P}(B^*)$ ist.

Verschiedene Homomorphismen über Alphabeten

Seien A, B Alphabete und $\alpha : A^* \to B^*$ ein Homomorpismus. Dann nennt man α

- *alphabetisch*, falls $\alpha(A) \subseteq B \cup \{\varepsilon\}$.
- *strikt alphabetisch*, falls $\alpha(A) \subseteq B$.
- eine *Substitution*, falls α eine Abbildung $\alpha : A^* \to \mathcal{P}(B^*)$ ist.
- eine *Projektion*, falls $\alpha(b) = b$ für $b \in B$ und $\alpha(a) = \varepsilon$ für $a \in A \setminus B$.

Satz von Nivat (1968)

Satz von Nivat (1968)

Seien A und B Alphabete. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

Satz von Nivat (1968)

Seien A und B Alphabete. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) $T : A^* \to \mathcal{P}(B^*)$ ist eine rationale Transduktion mit $T(\varepsilon) = \emptyset$ oder $T(\varepsilon) = \varepsilon$

Satz von Nivat (1968)

Seien A und B Alphabete. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

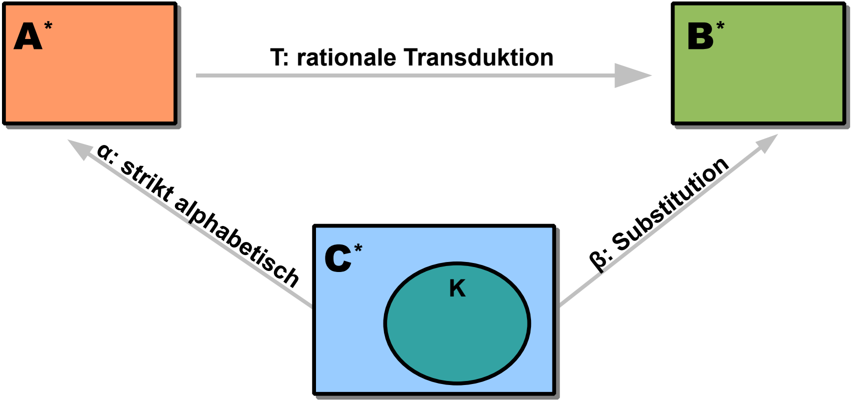
(1) $T : A^* \to \mathcal{P}(B^*)$ ist eine rationale Transduktion mit $T(\varepsilon) = \emptyset$ oder $T(\varepsilon) = \varepsilon$

(2) Es gibt ein Alphabet C, einen strikt alphabetischen Homomorphismus $\alpha : C^* \to A^*$, eine Substitution $\beta : C^* \to B^*$ und eine reguläre Sprache $K \subseteq C^*$, so dass gilt:

$$T(x) = \beta(\alpha^{-1}(x) \cap K) \quad (x \in A^*)$$

$$T(x) = \beta(\alpha^{-1}(x) \cap K) \quad (x \in A^*)$$

$$T(x) = \beta(\alpha^{-1}(x) \cap K) \quad (x \in A^*)$$



Erinnerung an Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen.

Korollar

Eine rationale Transduktion erhält Regularität. Für jede rationale Transduktion T gilt also: X regulär $\Rightarrow T(X)$ regulär.

Satz

Sei $\alpha : A^* \longrightarrow B^*$ ein Homomorphismus. Für jede reguläre Sprache $X \subseteq A^*$ gibt es eine reguläre Sprache $Y \subseteq X$, so dass α die Menge Y bijektiv auf die Menge $\alpha(X)$ abbildet.

Satz

Sei $\alpha : A^* \to B^*$ ein Homomorphismus. Für jede reguläre Sprache $X \subseteq A^*$ gibt es eine reguläre Sprache $Y \subseteq X$, so dass α die Menge Y bijektiv auf die Menge $\alpha(X)$ abbildet.

Idee

Nehme aus X jeweils das ”kleinste” Wort pro Klasse von Wörtern die das gleiche Bild haben.

Satz von Eilenberg

Sei $T : A^* \longrightarrow B^*$ eine rationale Funktion. Dann gibt es einen nicht-mehrdeutigen Transducer der T realisiert.

Satz von Eilenberg

Sei $T : A^* \longrightarrow B^*$ eine rationale Funktion. Dann gibt es einen nicht-mehrdeutigen Transducer der T realisiert.

Rückrichtung

Sei $\tau : A^* \longrightarrow B^*$ ein nicht-mehrdeutiger Transducer. Die Transduktion die von τ realisiert wird ist eine rationale Funktion.

Rückrichtung (Einfach)

Rückrichtung (Einfach)

Behauptung: Ein nicht-mehrdeutiger Transducer realisiert immer eine rationale Funktion.

Rückrichtung (Einfach)

Behauptung: Ein nicht-mehrdeutiger Transducer realisiert immer eine rationale Funktion.

1. Realisiert Funktion da für jedes Eingabewort $w \in A^*$ höchstens ein akz. Pfad existieren darf.

Rückrichtung (Einfach)

Behauptung: Ein nicht-mehrdeutiger Transducer realisiert immer eine rationale Funktion.

1. Realisiert Funktion da für jedes Eingabewort $w \in A^*$ höchstens ein akz. Pfad existieren darf.
2. Rationalität der Funktion: Folgt aus der Existenz der Transducers.

Beweis des Satz von Eilenberg

Beweis des Satz von Eilenberg

Da T rationale Funktion, gibt es (Nivat) Alphabet C, strikt alphabetischen Homomorphismus $\alpha : C^* \longrightarrow A^*$, Substitution $\beta : C^* \longrightarrow \mathcal{P}(B^*)$ und reguläre Sprache $K \subseteq C^*$ so dass:

$$T(x) = \beta(\alpha^{-1}(x) \cap K) \quad x \in A^*.$$

Beweis des Satz von Eilenberg

Da T rationale Funktion, gibt es (Nivat) Alphabet C, strikt alphabetischen Homomorphismus $\alpha : C^* \longrightarrow A^*$, Substitution $\beta : C^* \longrightarrow \mathcal{P}(B^*)$ und reguläre Sprache $K \subseteq C^*$ so dass:

$$T(x) = \beta(\alpha^{-1}(x) \cap K) \quad x \in A^*.$$

Es gelte $dom(T) = \alpha(K)$. Nach dem CS-Theorem gibt es eine reguläre Sprache $R \subseteq K$ die von α bijektiv auf $dom(T)$ abgebildet wird. Der DEA $\mathcal{A} = \langle C, Q_{\mathcal{A}}, q_{-_{\mathcal{A}}}, Q_{+_{\mathcal{A}}}, \delta\rangle$ erkennt die Sprache R. Als unseren Transducer definieren wir:

Beweis des Satz von Eilenberg

Da T rationale Funktion, gibt es (Nivat) Alphabet C, strikt alphabetischen Homomorphismus $\alpha : C^* \longrightarrow A^*$, Substitution $\beta : C^* \longrightarrow \mathcal{P}(B^*)$ und reguläre Sprache $K \subseteq C^*$ so dass:

$$T(x) = \beta(\alpha^{-1}(x) \cap K) \quad x \in A^*.$$

Es gelte $dom(T) = \alpha(K)$. Nach dem CS-Theorem gibt es eine reguläre Sprache $R \subseteq K$ die von α bijektiv auf $dom(T)$ abgebildet wird. Der DEA $\mathcal{A} = \langle C, Q_{\mathcal{A}}, q_{-_{\mathcal{A}}}, Q_{+_{\mathcal{A}}}, \delta \rangle$ erkennt die Sprache R. Als unseren Transducer definieren wir:

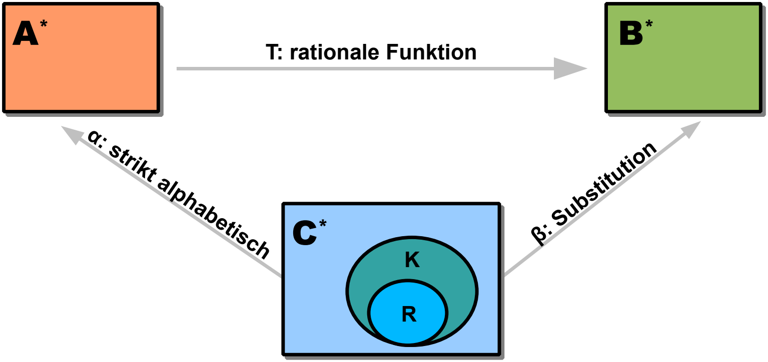
$$\begin{aligned} \tau &= \langle A, B, Q_{\mathcal{A}}, q_{-_{\mathcal{A}}}, Q_{+_{\mathcal{A}}}, E \rangle \\ E &= \{(q, \alpha(c), \beta(c), \delta(q,c)) \mid q \in Q_{\mathcal{A}}, c \in C\}. \end{aligned}$$

$$\text{Nivat:} \qquad T(x) = \beta(\alpha^{-1}(x) \cap K) \quad (x \in A^*)$$

$$\text{CS-Theorem:} \qquad \exists R \subseteq K : \alpha(R) \to dom(T) \text{ ist bijektiv}$$

Nivat: $T(x) = \beta(\alpha^{-1}(x) \cap K) \quad (x \in A^*)$

CS-Theorem: $\exists R \subseteq K : \alpha(R) \to dom(T)$ ist bijektiv



Erinnerung: Kanten des Transducers τ

$$E = \{(q, \alpha(c), \beta(c), \delta(q, c)) \mid q \in Q_{\mathcal{A}}, c \in C\}$$

Erinnerung: Kanten des Transducers τ

$$E = \{(q, \alpha(c), \beta(c), \delta(q, c)) \mid q \in Q_{\mathcal{A}}, c \in C\}$$

Beweis des Satz von Eilenberg (Fortsetzung)

Der Transducer τ muss Eigenschaften (1) und (2) für nicht-mehrdeutige Transducer erfüllen. Die Eigenschaft (1) wird erfüllt, da

$$\alpha(c) \in A \quad (\text{für } c \in C).$$

Erinnerung: Kanten des Transducers τ

$$E = \{(q, \alpha(c), \beta(c), \delta(q, c)) \mid q \in Q_{\mathcal{A}}, c \in C\}$$

Beweis des Satz von Eilenberg (Fortsetzung)

Der Transducer τ muss Eigenschaften (1) und (2) für nicht-mehrdeutige Transducer erfüllen. Die Eigenschaft (1) wird erfüllt, da

$$\alpha(c) \in A \quad (\text{für } c \in C).$$

Eigenschaft (2) wird erfüllt da α auf $R \longrightarrow A^*$ bijektiv ist, und β auf $R \longrightarrow B^*$ ein Homomorphismus ist. Also gibt es für jedes $x \in A^*$ nur genau ein $w \in R$ so dass $\alpha(w) = x$, und für jedes dieser $w \in R$ ist $|\beta(w)| = 1$.
Da $\delta(q, c)$ eine Übergangsfunktion ist gibt es für jedes Wort höchstens einen akzeptierenden Lauf in τ.

Beweis des CS-Theorems, Vorraussetzungen

Beweis des CS-Theorems, Vorraussetzungen

1. Falls $\beta : B^* \longrightarrow C^*$ Homomorphismus, und der Satz für α und β gilt, gilt er auch für $\beta \circ \alpha$.

Beweis des CS-Theorems, Vorraussetzungen

1. Falls $\beta : B^* \longrightarrow C^*$ Homomorphismus, und der Satz für α und β gilt, gilt er auch für $\beta \circ \alpha$.
2. Falls α injektiv, dann ist Behauptung trivial.

Beweis des CS-Theorems, Vorraussetzungen

1. Falls $\beta : B^* \longrightarrow C^*$ Homomorphismus, und der Satz für α und β gilt, gilt er auch für $\beta \circ \alpha$.
2. Falls α injektiv, dann ist Behauptung trivial.
3. Jeder Homomorphismus kann in Verknüpfung von injektiver Abb. und alpabetischem Hom. faktorisiert werden.

Beweis des CS-Theorems, Vorraussetzungen

1. Falls $\beta : B^* \longrightarrow C^*$ Homomorphismus, und der Satz für α und β gilt, gilt er auch für $\beta \circ \alpha$.
2. Falls α injektiv, dann ist Behauptung trivial.
3. Jeder Homomorphismus kann in Verknüpfung von injektiver Abb. und alpabetischem Hom. faktorisiert werden.
4. Jeder alphabetische Hom. kann in strikt alphab. Hom. und Projektionen faktorisiert werden.

Beweis des CS-Theorems (Fortsetzung)

Man muss nur die beiden Fälle betrachten (strikt alphabetischer Homomorphismus oder Projektion):

$$A = \{a_1, \ldots, a_n\}, \quad B = \{a_1, \ldots, a_{n-1}\} \quad (n \geq 2)$$

$$\alpha(a_i) = a_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, n-1$$

$$\alpha(a_n) = a_{n-1} \qquad \text{oder} \qquad \alpha(a_n) = \varepsilon$$

Man benutzt lexikografische Ordnung auf A^*.

Beweis des CS-Theorems (Fortsetzung)

Konstruktion einer Transduktion $T : A^* \longrightarrow A^*$:

$$T(u) = \{v \mid v > u \text{ und } \alpha(v) = \alpha(u)\}$$

Beweis des CS-Theorems (Fortsetzung)

Konstruktion einer Transduktion $T : A^* \longrightarrow A^*$:

$$T(u) = \{v \mid v > u \text{ und } \alpha(v) = \alpha(u)\}$$

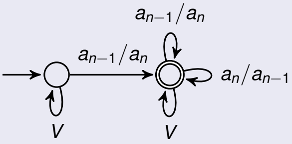
Unsere Cross-Section ist also: $Y = X \setminus T(X)$. Regularität von Y durch Konstruktion eines Transducers der T realisiert:

Beweis des CS-Theorems (Fortsetzung)

Konstruktion einer Transduktion $T : A^* \longrightarrow A^*$:

$$T(u) = \{v \mid v > u \text{ und } \alpha(v) = \alpha(u)\}$$

Unsere Cross-Section ist also: $Y = X \setminus T(X)$. Regularität von Y durch Konstruktion eines Transducers der T realisiert:



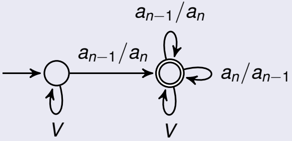
(i) T für str. alph. Hom.

Beweis des CS-Theorems (Fortsetzung)

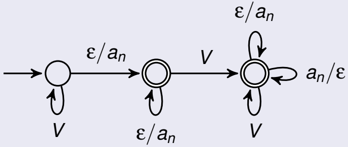
Konstruktion einer Transduktion $T : A^* \to A^*$:

$$T(u) = \{v \mid v > u \text{ und } \alpha(v) = \alpha(u)\}$$

Unsere Cross-Section ist also: $Y = X \setminus T(X)$. Regularität von Y durch Konstruktion eines Transducers der T realisiert:



(k) T für str. alph. Hom.

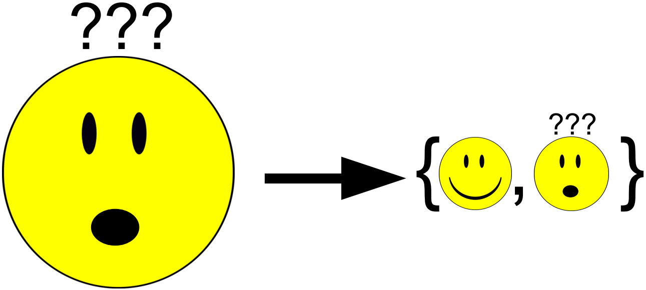


(l) T für Projektion

$$(\text{Es gilt } V = \{a_i/a_i \mid i = 1, \ldots n-1\})$$

Rationale Transduktion oder . . .

Rationale Transduktion oder ...



. . . rationale Funktion?