

Seminar über Automatentheorie

Wintersemester 08/09

Das Cross-Section-Theorem und nicht-mehrdeutige Transducer

Autor: Johannes Gilger

Matrikelnummer: 266377

Betreuender Lehrstuhl:
Lehrstuhl für Informatik VII
RWTH Aachen

Betreuer: Frank Radmacher

Aachen, 17. März 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Rationale Relationen und rationale Transduktionen	2
3	Rationale Funktionen	5
4	Nicht-mehrdeutige Transduktoren	6
5	Das Cross-Section-Theorem	8
6	Zusammenfassung	11

1 Einleitung

Reguläre Sprachen über endlichen Alphabeten sind im Studium der Informatik allgegenwärtig und werden in diversen Veranstaltungen ausführlich behandelt. Neben Sprachen über einem Alphabet A kann man natürlich auch Relationen über Alphabeten A und B betrachten, also Teilmengen von $A^* \times B^*$. Dieser Text beschäftigt sich mit rationalen Relationen und verschiedenen Arten und Weisen, diese Relationen darzustellen und zu erkennen.

Den Kern dieser Ausarbeitung bildet die Äquivalenz von rationalen Funktionen und nicht-mehrdeutigen Transduktoren. Deshalb wird auf konstruktive Art und Weise gezeigt wie man rationale Funktionen in eine eindeutige Form überführt, die von diesen nicht-mehrdeutigen Transduktoren erkannt werden. Dazu werden *rationale Relationen*, *rationale Transduktionen* und *rationale Funktionen* mit den wichtigsten Definitionen und Sätzen in den Abschnitten 2 und 3 eingeführt. In Abschnitt 4 wird eine bestimmte Art rationaler Transduktionen betrachtet, nämlich jene, die von *nicht-mehrdeutigen Transduktoren* ("unambiguous transducers") erkannt werden. Das *Cross-Section-Theorem*, welches in Abschnitt 5 vorgestellt wird, und der *Satz von Nivat* sind die beiden wichtigsten Hilfsmittel für die Konstruktion nicht-mehrdeutiger Transduktoren aus rationalen Funktionen.

Dieser Text bezieht sich ausschliesslich auf das Buch "Transductions and Context-Free Languages"[1] von J. Berstel aus dem Jahr 1979. Die Sätze, die auftauchen, sind entweder direkt aus diesem Buch entnommen oder werden dort nur mit Hinweis auf ihre Herkunft erwähnt.

2 Rationale Relationen und rationale Transduktionen

In diesem Abschnitt werden rationale Relationen eingeführt und direkt im Anschluss dazu (rationale) Transduktionen und Transduktoren.

Definition 2.1 Seien A und B Alphabete. Eine *rationale Relation* über A und B ist induktiv definiert durch:

- R ist endlich $\Rightarrow R$ ist rational
- R, S rational $\Rightarrow R \cup S$ rational
- R, S rational $\Rightarrow R \cdot S$ rational
- R rational $\Rightarrow R^*$ rational

Wie reguläre Sprachen über einem Alphabet Σ unter Vereinigung, Konkatenation und Stern-Operation abgeschlossen sind, gilt dies also auch für rationale Relationen. Dabei ist die Vereinigung zweier rationaler Sprachen R, S die Menge

$$R \cup S = \{(u, v) \mid (u, v) \in R \vee (u, v) \in S\}.$$

Die Konkatenation ist definiert als

$$R \cdot S = \{(ux, vy) \mid (u, v) \in R, (x, y) \in S\}$$

und die Stern-Operation über R wie gewohnt

$$R^* = \{(u_1 u_2 \dots u_n, v_1 v_2 \dots v_n) \mid n \in \mathbb{N}, (u_i, v_i) \in R\}.$$

Sind rationale Relationen die statische Auffassung einer Teilmenge von $A^* \times B^*$, so sind *rationale Transduktionen* ("Übersetzungen") das dynamische Äquivalent. Statt Mengen von Tupeln stellt man sich bei Transduktionen die Abbildung von einer Menge A^* in eine andere Menge $\mathcal{P}(B^*)$ vor.

Definition 2.2 Eine *Transduktion* T von A^* nach B^* ist eine Abbildung von A^* in die Menge $\mathcal{P}(B^*)$. Die Definitionsmenge ("domain") $\text{dom}(T)$ und die Bildmenge ("image") $\text{im}(T)$ sind definiert als

$$\begin{aligned} \text{dom}(T) &= \{x \in A^* \mid T(x) \neq \emptyset\} \\ \text{im}(T) &= \{y \in B^* \mid \exists x \in A^* : y \in T(x)\}. \end{aligned}$$

Der *Graph einer Transduktion* T ist die Relation R für die gilt

$$R = \{(x, y) \in A^* \times B^* \mid y \in T(x)\}.$$

Der Graph ist also der Rückschluss auf die dahinterliegende Relation. Mit dem Begriff des Graphs einer Transduktion können wir rationale Transduktionen definieren.

Definition 2.3 Eine Transduktion $T : A^* \rightarrow \mathcal{P}(B^*)$ ist *rational* gdw. der Graph R von T eine rationale Relation über A^* und B^* ist.

Im Folgenden werden Transduktoren definiert, das sind Maschinen, die rationale Transduktionen (und damit natürlich auch rationale Relationen) realisieren.

Definition 2.4 Ein *Transduktor* $\tau = \langle A, B, Q, q_-, Q_+, E \rangle$ besteht aus einem Eingabealphabet A , einem Ausgabealphabet B , einer endlichen Zustandsmenge Q , dem Startzustand $q_- \in Q$, einer Menge aus Endzuständen $Q_+ \subset Q$ und einer endlichen Menge

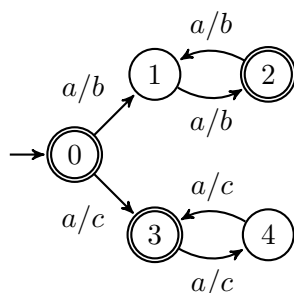
$$E \subset Q \times A^* \times B^* \times Q$$

von Transitionen. Ein Transduktor τ akzeptiert ein Paar (u, v) gdw. ein Pfad in Q^* von q_- nach $q \in Q_+$ mit Kanten in der Transititionsrelation E existiert, der gemäß (u, v) beschriftet ist.

Wie schon in der Einleitung angedeutet, kann man sich diese Automaten analog zu bekannten endlichen Automaten über Wörtern vorstellen, mit dem Unterschied, dass die Transitionen auf Paaren von Wörtern arbeiten. Anschaulich gemacht wird dies in Abbildung 1.

Beispiel 2.5 Sei $R_1 = \{(a^n, b^n) \mid n \text{ gerade}\} \cup \{(a^n, c^n) \mid n \text{ ungerade}\}$. Der Transduktor in Abbildung 1 erkennt R_1 .

Analog zu der Äquivalenz von endlichen Automaten und regulären Sprachen lässt sich zeigen, dass rationale Relationen zu Transduktoren äquivalent sind. Auf die Ausführung des Beweises wird hier verzichtet.

Abbildung 1: Der Transduktor über die Sprache R_1

Satz 2.6 (Elgot, Mezei) [3]

Eine Transduktion T wird durch einen Transduktor realisiert gdw. der Graph R von T eine rationale Relation ist.

Die im nächsten Satz verwendeten Arten von Homomorphismen über Alphabeten müssen hier noch kurz definiert werden.

Definition 2.7 Seien A, B Alphabete und $\alpha : A^* \rightarrow B^*$ ein Homomorphismus. Dann nennt man α *alphabetisch*, falls $\alpha(A) \subset B \cup \{\varepsilon\}$, und *strikt alphabetisch*, falls $\alpha(A) \subset B$. Die Abbildung α ist eine *Projektion*, falls $B \subset A$ und $\alpha(b) = b$ für $b \in B$ und $\alpha(a) = \varepsilon$ für $a \in A \setminus B$.

Eine *Substitution* $A^* \rightarrow B^*$ ist eine Abbildung $\sigma : A^* \rightarrow \mathcal{P}(B^*)$ mit $\sigma(\varepsilon) = \varepsilon$ und $\sigma(uv) = \sigma(u)\sigma(v)$. Man nennt α eine *Substitution*, falls α eine Abbildung $\alpha : A^* \rightarrow \mathcal{P}(B^*)$ ist.

Der folgende Satz charakterisiert rationale Transduktionen durch die Darstellbarkeit durch eine reguläre Sprache und zwei Homomorphismen. Er wird später gebraucht um die Äquivalenz rationaler Funktionen und nicht-mehrdeutiger Transduktoren zu beweisen.

Satz 2.8 (Nivat) [4]

Seien A und B Alphabete. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) $T : A^* \rightarrow \mathcal{P}(B^*)$ ist eine rationale Transduktion mit $T(\varepsilon) = \emptyset$ oder $T(\varepsilon) = \varepsilon$
- (2) Es gibt ein Alphabet C , einen strikt alphabetischen Homomorphismus $\alpha : C^* \rightarrow A^*$, eine Substitution $\beta : C^* \rightarrow \mathcal{P}(B^*)$ und eine reguläre Sprache $K \subseteq C^*$ so dass gilt:

$$T(x) = \beta(\alpha^{-1}(x) \cap K) \quad (x \in A^*)$$

Beweisidee.

An dieser Stelle soll nur informell gezeigt werden, wie man zu einer gegebenen rationalen Transduktion T das Alphabet C , die reguläre Sprache K und die Abbildungen α und β gewinnen kann.

Zunächst muss dazu die rationale Transduktion T durch einen Transduktor τ , der sie realisiert, dargestellt werden. Als Alphabet C wird jetzt die Menge der Transitionsrelationen von τ gewählt. Die reguläre Sprache $K \subseteq C^*$ ist die Menge der Transitionsfolgen aller akzeptierender Läufe von τ .

Für jede Transition $(p, u/v, q)$ in τ werden die Abbildungen α und β wie folgt definiert:

$$\alpha(p, u/v, q) = u \quad \beta(p, u/v, q) = v.$$

Die Bedingung, dass α ein strikt alphabetischer Homomorphismus ist, kann immer erfüllt werden, da sich jeder Transduktor in eine äquivalente Form überführen lässt, so dass für jede Transition $(p, u/v, q)$ gilt, dass $u \in A$ ein einzelner Buchstabe ist.

Zur Rückrichtung sei gesagt, dass sie sich aus diversen Abschlusseigenschaften rationaler Transduktionen ergibt. \square

Diese Konstruktion kann anschaulich anhand Beispiel 5.3 nachvollzogen werden.

Da reguläre Sprachen unter Homomorphismen, inversen Homomorphismen und Schnitt abgeschlossen sind, können wir folgendes Korollar gewinnen, welches wir später benutzen werden.

Korollar 2.9 Eine rationale Transduktion erhält Regularität. Für jede rationale Transduktion T gilt also: X regulär $\Rightarrow T(X)$ regulär.

3 Rationale Funktionen

Rationale Funktionen, also rationale Transduktionen die (partielle) Funktionen realisieren, besitzen einige Eigenschaften, die sie für uns interessant machen. So ist z.B. das Inklusionsproblem für rationale Funktionen entscheidbar, also für gegebene rationale Funktionen α, β ist es entscheidbar, ob $\alpha \subset \beta$. Durch die Entscheidbarkeit der Inklusion wird natürlich auch das Äquivalenzproblem entscheidbar, denn $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta \wedge \beta \subset \alpha$. Beide Probleme sind für rationale Relationen i.A. unentscheidbar.

Rationale Funktionen können außerdem in einer eindeutigen Art dargestellt werden. Dazu werden in den folgenden Abschnitten das Cross-Section-Theorem und das Konzept der nicht-mehrdeutigen Transduktoren vorgestellt, mit denen eindeutige Darstellungen rationaler Funktionen konstruiert werden können.

Definition 3.1 Eine rationale (partielle) Funktion $\alpha : A^* \rightarrow \mathcal{P}(B^*)$ ist eine rationale Transduktion, so dass $|\alpha(w)| \leq 1$ für alle $w \in A^*$.

Wir sprechen dann von einer *rationalen Funktion* $\alpha : A^* \rightarrow B^*$, da die Bildmenge nur aus Mengen der Mächtigkeit ≤ 1 besteht.

Beispiel 3.2 (Berstel) [1]

Sei $\alpha : \{a\}^* \rightarrow \{b, c\}^*$ eine Funktion gegeben durch:

$$\alpha(a^n) := \begin{cases} b^n, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ c^n, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Offensichtlich ist α eine Funktion. Dass α auch eine rationale Transduktion ist, kann man sich durch Konstruktion eines geeigneten Transduktors, der α erkennt, verdeutlichen. Der Transduktor der α realisiert ist in Abbildung 1 dargestellt.

Hat man statt einer Funktion einen Transduktor gegeben, so ist man sich der Rationalität der Transduktion bewusst und muss nur noch untersuchen, ob die realisierte Transduktion auch eine (partielle) Funktion ist. Ein weiteres Beispiel für eine rationale Funktion ist in Abbildung 4(a) gegeben. An diesem Beispiel kann man auch gut sehen, dass, obwohl es mehrere verschiedene Läufe für jeweils ein Eingabewort gibt, trotzdem eine rationale Funktion realisiert wird. Die Entscheidbarkeit der Frage, ob die durch einen Transduktor realisierte Transduktion auch eine (partielle) Funktion ist, wurde von Schützenberger gezeigt [5].

4 Nicht-mehrdeutige Transduktoren

In diesem Abschnitt soll eine besondere Darstellung rationaler Funktionen vorgestellt werden. Das Konzept, das wir dazu benutzen, ist das eines nicht-mehrdeutigen Transduktors. Das Cross-Section-Theorem aus dem nächsten Abschnitt und der Satz von Nivat werden benutzt um nicht-mehrdeutige Transduktoren aus rationalen Transduktoren zu gewinnen.

Die Transduktoren in diesem Abschnitt besitzen folgende Eigenschaften:

$$E \subset Q \times A \times B^* \times Q \quad (1)$$

$$(p, a, z, q), (p, a, z', q) \in E \implies z = z' \quad (2)$$

Definition 4.1 Ein Transduktor τ ist *nicht-mehrdeutig* ("unambiguous"), falls für jedes Wort $x \in A^*$ höchstens ein akzeptierender Lauf von τ auf x existiert.

Dabei muss beachtet werden dass sich die Mehrdeutigkeit *nicht* aus den Eigenschaften (1) und (2) ergibt. So gibt es Automaten, die (1) und (2) erfüllen, aber trotzdem mehrdeutig sind (siehe z.B. Abbildung 4(a)).

Außerdem gibt es rationale Transduktoren, die zwar rationale Funktionen realisieren, aber dennoch keine nicht-mehrdeutigen Transduktoren sind. Solche Transduktoren können mithilfe des Cross-Section-Theorems und des Satzes von Nivat in eine Form überführt werden, die den Eigenschaften eines nicht-mehrdeutigen Transduktors entspricht und (1) und (2) erfüllen.

Satz 4.2 (Eilenberg)

Sei $f : A^* \rightarrow B^*$ eine rationale Funktion. Dann gibt es einen nicht-mehrdeutigen Transduktor τ der f realisiert. Der Transduktor τ erfüllt zudem die Eigenschaften (1) und (2).

Beweis. Nach dem Satz von Nivat gibt es ein Alphabet C , einen strikt alphabetischen Homomorphismus $\alpha : C^* \rightarrow A^*$, eine Substitution $\sigma : C^* \rightarrow B^*$ und eine reguläre Sprache $K \subset C^*$, so dass gilt:

$$f(x) = \sigma(\alpha^{-1}(x) \cap K) \quad x \in A^*$$

Da wir annehmen können, dass C minimal ist, d.h. jeder Buchstabe $c \in C$ mindestens ein Vorkommen in einem Wort aus $\alpha^{-1}(A^*) \cap K$ hat, und f eine partielle Funktion ist, ist σ ein Homomorphismus.

Da $\text{dom}(\tau) = \alpha(K)$, gibt es nach dem Cross-Section-Theorem (welches in Abschnitt 5 eingeführt wird) eine reguläre Sprache $R \subset K$, die von α bijektiv nach $\text{dom}(T)$ abgebildet wird. Sei $\mathfrak{A} = \langle Q, C, \delta, q_-, Q_+ \rangle$ ein endlicher Automat, der R erkennt, und sei

$$\begin{aligned} \tau &= \langle A, B, Q, q_-, Q_+, E \rangle \text{ ein Transduktor mit} \\ E &= \{(q, \alpha(c), \sigma(c), \delta(q, c)) \mid q \in Q, c \in C\} \end{aligned}$$

Der Transduktor τ erfüllt die Eigenschaft (1), da α strikt alphabetisch ist, d.h. $\alpha(c) \in A$ für $c \in C$. Eigenschaft (2) wird erfüllt, da $\sigma(c)$ ein Homomorphismus ist, und somit für jedes $c \in C$ nur ein Ausgabewort $\sigma(c)$ existiert, und es, da α strikt alphabetisch ist, kein anderes $c' \in C$ mit $c \neq c'$ gibt, so dass $\alpha(c') = \alpha(c)$. Um zu zeigen, dass τ nicht-mehrdeutig ist, betrachte die Pfade

$$\begin{aligned} e &= (q_-, u_1, v_1, q_1) \cdots (q_{n-1}, u_n, v_n, q) \\ e' &= (q_-, u'_1, v'_1, q'_1) \cdots (q_{m-1}, u'_m, v'_m, q') \end{aligned}$$

und sei $c_i, c'_j \in C$ so dass $\alpha(c_i) = u_i$ ($1 \leq i \leq n$), $\alpha(c'_j) = u'_j$ ($1 \leq j \leq m$). Sei das Eingabewort für e und e' gleich, also $x = \alpha(z) = \alpha(z')$ mit $z = c_1 \cdots c_n$, $z' = c'_1 \cdots c'_m$. Da $z, z' \in R$ und α injektiv auf R ist, folgt dass $z = z'$ und $e = e'$. Damit wurde gezeigt dass T nicht-mehrdeutig ist. \square

Dass der Umkehrschluss auch gilt, also nicht-mehrdeutige Transduktoren immer (und ausschliesslich) rationale Funktionen realisieren, soll im Folgenden gezeigt werden.

Folgerung 4.3 Rationale Funktionen realisieren genau die Relationen, die durch nicht-mehrdeutige Transduktoren erkannt werden.

Beweis. Da eine Richtung schon durch den vorherigen Satz gezeigt und bewiesen wurde, müssen wir uns nur noch die Rückrichtung klarmachen.

Ein nicht-mehrdeutiger Transduktor τ realisiert eine (partielle) Funktion, da nach der Definition von nicht-mehrdeutigen Transduktoren jedes Eingabewort $x \in A^*$ die Eingabe für höchstens einen akzeptierenden Pfad e in τ ist, und damit auch höchstens ein Wort $y \in B^*$ ausgegeben werden kann. Also steht folglich jedes $x \in A^*$ mit höchstens einem Wort $y \in B^*$ in Relation. Die Rationalität der Funktion ergibt sich aus der Existenz des Transduktors τ , der die Funktion realisiert. \square

5 Das Cross-Section-Theorem

Nun soll noch eine Methode gezeigt werden, um spezielle Darstellungen rationaler Funktionen zu konstruieren. Wie im letzten Abschnitt mit Satz 4.2 gezeigt wurde, lässt sich mit dem Satz von Nivat (bei injektivem α) direkt und einfach ein nicht-mehrdeutiger Transduktor aus einer rationalen Funktion gewinnen. Für nicht-injektive Homomorphismen α kann der entsprechende Transduktor mehrere akzeptierende Läufe für ein Eingabewort besitzen. Das Cross-Section-Theorem eliminiert diese überflüssigen Pfade.

Satz 5.1 (Cross-Section Theorem nach Eilenberg)[2]

Sei $\alpha : A^* \rightarrow B^*$ ein Homomorphismus. Für jede reguläre Sprache $X \subseteq A^*$ gibt es eine reguläre Sprache $Y \subseteq X$, so dass α die Menge Y bijektiv auf die Menge $\alpha(X)$ abbildet.

Sei $Z = \alpha(X)$. Dann gibt es (laut Cross-Section-Theorem) in jeder Klasse $X \cap \alpha^{-1}(z)$, ($z \in Z$) genau ein Wort u_z , so dass die Sprache $Y = \{u_z \mid z \in Z\}$ regulär ist. Im Folgenden soll ein Weg gezeigt werden, wie eine solche Sprache Y (auch *Cross-Section* von α auf X genannt) konstruiert werden kann.

Um den Beweis zu führen muss die Abbildung α in mehrere Homomorphismen faktorisiert werden. Deshalb müssen wir erst sicher gehen, dass zu gegebenen Homomorphismen $\alpha : A^* \rightarrow B^*$ und $\beta : B^* \rightarrow C^*$, für die der Satz gilt, für die Verknüpfung $\beta \circ \alpha$ ebenfalls die Aussage gilt.

Sei also $X \subseteq A^*$ regulär und sei Y eine reguläre Cross-Section von α auf X . Definiere $Z = \alpha(X) = \alpha(Y)$, und sei $T \subseteq B^*$ eine reguläre Cross-Section von β auf Z . Definiere $U = Y \cap \alpha^{-1}(T)$. Dann ist U regulär, α ist injektiv auf U und $\alpha(U) = T$. Weil β injektiv auf T ist, folgt dass $\beta \circ \alpha$ injektiv auf U ist. Ausserdem gilt $\beta \circ \alpha(U) = \beta(T) = \beta(Z) = \beta \circ \alpha(X)$. Daher ist U eine Cross-Section von $\beta \circ \alpha$ auf X .

Beweis (von Satz 5.1).

- Falls die Abbildung α injektiv ist, dann ist der Beweis trivial, da man einfach $Y = X$ wählen kann.
- Ansonsten muss man nur alphabetische Homomorphismen betrachten, da wir jeden Homomorphismus $\alpha : A^* \rightarrow B^*$ in Homomorphismen $\beta \circ \gamma$ faktorisieren können, so dass $\gamma : A^* \rightarrow C^*$ injektiv und $\beta : C^* \rightarrow B^*$ alphabetisch ist.

Einen alphabetischen Homomorphismus kann man wiederum in Kompositionen von Projektionen und strikt alphabetischen Homomorphismen zerlegen, so dass wir nur diese zwei Fälle behandeln müssen:

$$A = \{a_1, \dots, a_n\}, \quad B = \{a_1, \dots, a_{n-1}\} \quad (n \geq 2)$$

$$\alpha(a_i) = a_i, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$\alpha(a_n) = a_{n-1} \quad (\text{falls } \alpha \text{ ein strikt alphabetischer Homomorphismus) oder}$$

$$\alpha(a_n) = \varepsilon \quad (\text{falls } \alpha \text{ eine Projektion)}$$

Man benutzt die lexikografische Ordnung auf A^* , was für Wörter $u, v \in A^*$ bedeutet: $u < v$ gdw.

$$v = uw, \text{ mit } w \neq \varepsilon \quad \text{oder} \quad u = xa_iy, v = xa_jy', \text{ mit } i < j$$

Dann braucht man eine Transduktion $T : A^* \rightarrow A^*$:

$$T(u) = \{v \mid v > u \text{ und } \alpha(v) = \alpha(u)\}$$

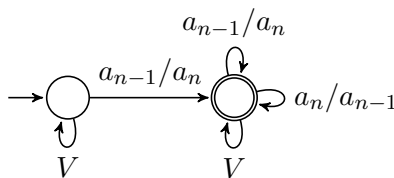
und die schon erwähnte Menge Y als

$$Y = X \setminus T(X).$$

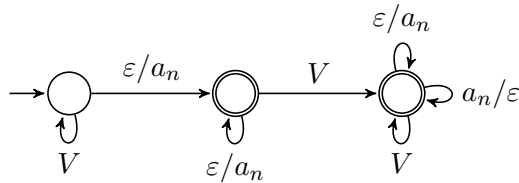
Anschaulich gesprochen bedeutet das, dass man für jedes $u \in X$ das kleinste Element (ausgehend von der lexikografischen Ordnung) aus $\alpha^{-1}\alpha(u) \cap A$ auswählt und diese der Menge Y hinzufügt.

Um zu zeigen, dass Y regulär ist, genügt es, die Rationalität der Transduktion T zu zeigen. Dann ergibt sich nach Korollar 2.9 die Regularität von Y . Wie schon zuvor erwähnt, wird dies durch Konstruktion eines entsprechenden Transduktors erreicht.

Falls $\alpha(a_n) = a_{n-1}$ dann konstruieren wir einen Transduktor wie in Abbildung 2(a) mit $V = \{a_i/a_i \mid i = 1, \dots, n-1\}$. Im anderen Fall, also $\alpha(a_n) = \varepsilon$, wird der Transduktor wie in Abbildung 2(b) konstruiert.



2(a) Transducer τ für $\alpha(a_n) = a_{n-1}$



2(b) Transducer τ für $\alpha(a_n) = \varepsilon$

□

Ein einfaches Beispiel zur Bildung einer Cross-Section ist das folgende.

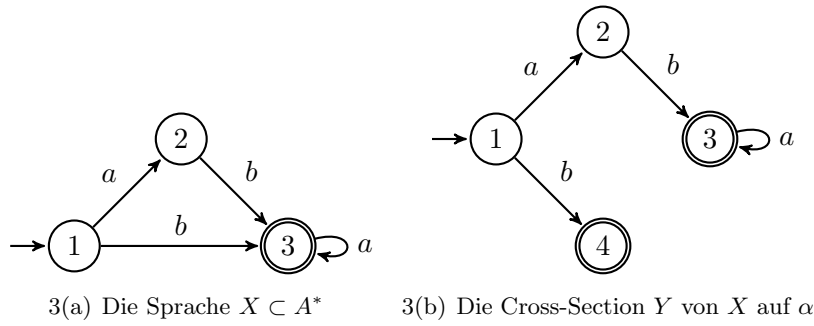
Beispiel 5.2 Sei $A = \{a, b\}$ und $\alpha : A^* \rightarrow a^*$ der Homomorphismus der durch $\alpha(a) = a$ und $\alpha(b) = a$ definiert ist. Sei $X = (aba^* + ba^*) \subset A^*$ durch den endlichen Automaten in Abbildung 3(a) gegeben. Sei eine lexikografische Ordnung auf A^* durch $a < b$ gegeben. Die im Beweis erwähnte Transduktion T wird auf X angewandt, so dass gilt

$$T(X) = bA^+.$$

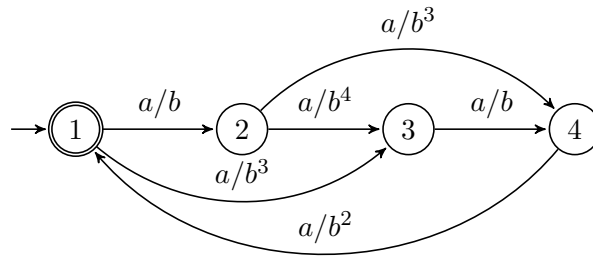
Dann ist die Cross-Section von α auf X gegeben durch

$$Y = X \setminus T(X) = aba^* + b,$$

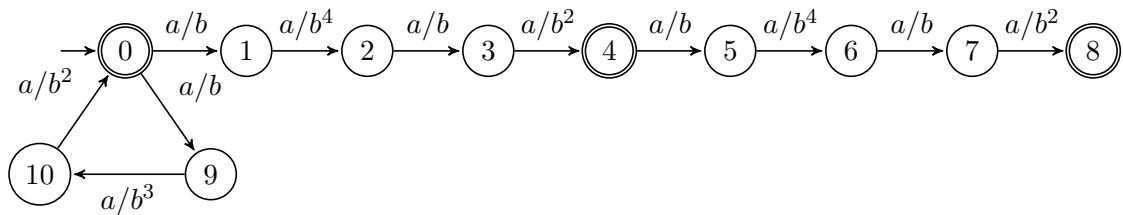
welche durch den Automaten in Abbildung 3(b) erkannt wird.



Während dieses Beispiel zwar übersichtlich die Konstruktion einer Cross-Section demonstriert, so ist es jedoch im Kontext dieser Ausarbeitung nicht alleinig ausreichend, da die Abbildung α bereits ein strikt alphabetischer Homomorphismus ist und die Konstruktion aus Satz 2.8 nicht benutzt wird. Ein anderes Beispiel soll deshalb den Nutzen des Cross-Section-Theorems verdeutlichen, in dem zu gegebenem mehrdeutigen Transduktor, der eine rationale Funktion realisiert, ein äquivalenter nicht-mehrdeutiger Transduktor konstruiert wird.



4(a) Mehrdeutiger Transduktor



4(b) Nicht-mehrdeutiger Transduktor

Beispiel 5.3 (Berstel) [1]

Sei der mehrdeutige Transduktor in Abbildung 4(a) gegeben. Die Konstruktion geschieht gemäß der Darstellung rationaler Transduktion wie im Satz 2.8. Man wähle also die Transitionen als Alphabet $C = \{(a/b), (a/b^2), (a/b^3), (a/b^4)\}$ und als Homomorphismus α die Abbildung, die alle Buchstaben auf a abbildet. Wir bilden eine geeignete Cross-Section. Der Übersichtlichkeit halber stellen wir C als $C' = \{a, b, c, d\}$ dar. Die Substitution β lässt sich dann beschreiben durch: $\beta(a) = b, \beta(b) = b^2, \beta(c) = b^3, \beta(d) = b^4$. Es ist

$$X = [(bdb + bc + cb)a]^* \subset C'^*$$

unsere reguläre Sprache, von der wir die Cross-Section bilden möchten. Wie im Beweis von Satz 5.1 angedeutet faktorisieren wir α in Abbildungen $\alpha_3 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1 = \alpha$:

$$C^* \xrightarrow{\alpha_1} \{a, b, c\}^* \xrightarrow{\alpha_2} \{a, b\}^* \xrightarrow{\alpha_3} a^*$$

mit $\alpha_1(d) = c, \alpha_2(c) = b, \alpha_3(b) = a$ und den anderen Buchstaben unverändert. Also sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ strikt alphabetisch.

Zuerst bilden wir

$$X_1 = \alpha_1(X) = [(bcb + bc + cb)a]^*,$$

wobei α_1 injektiv auf X ist. Somit ist X bereits eine reguläre Cross-Section von α_1 auf X . Als nächstes

$$X_2 = \alpha_2(X_1) = [(b^3 + b^2)a]^*.$$

Es gilt $b < c$ und

$$X'_1 = X_1 \setminus T(X_1) = [(bcb + bc)a]^* \subset X_1$$

ist eine reguläre Cross-Section von α_2 auf X_1 . Nun

$$X_3 = \alpha_2(X_2) = [a^4 + a^3]^*.$$

Da $a < b$ gilt, gibt uns die im Beweis verwendete Konstruktion

$$X'_2 = X_2 \setminus T(X_2) = (b^2a)^*(\varepsilon + b^3a + (b^3a)^2)$$

als reguläre Cross-Section von α_3 auf X_2 . Durch Einsetzen erhalten wir

$$X''_1 = X'_1 \cap \alpha_2^{-1}(X'_2) = (bca)^*(\varepsilon + bcba + (bcba)^2)$$

als reguläre Cross-Section von $\alpha_3 \circ \alpha_2$ auf X_1 . Letzendlich erhalten wir

$$Y = X \cap \alpha_1^{-1}(X''_1) = (bca)^*(\varepsilon + bdba + (bdba)^2)$$

als reguläre Cross-Section von α auf X und damit auch (ausgedrückt mit unserem ursprünglichen Alphabet)

$$Y = [(a/b)(a/b^3)(a/b^2)]^* \left(\varepsilon/\varepsilon + (a/b)(a/b^4)(a/b)(a/b^2) + [(a/b)(a/b^4)(a/b)(a/b^2)]^2 \right).$$

Der sprachäquivalente nicht-mehrdeutige Transduktor ist in Abbildung 4(b) dargestellt.

6 Zusammenfassung

Wir haben in dieser Ausarbeitung den Begriff der rationalen Relationen kennengelernt. Dazu äquivalent wurden rationale Transduktionen und Transduktoren eingeführt. Mithilfe rationaler Transduktionen waren wir in der Lage, rationale Funktionen als besondere Arten rationaler Relationen zu definieren, aus der Motivation heraus, dass bestimmte Entscheidungsprobleme für rationale Funktionen lösbar werden.

Im Kapitel über nicht-mehrdeutige Transduktoren haben wir dann gesehen und bewiesen, dass sich ein Transduktor der eine rationale Funktion realisiert, immer in einer eindeutigen Form darstellen lässt. Das Cross-Section-Theorem und der Satz von Nivat waren Hilfsmittel um diese eindeutige Darstellung einer rationalen Funktion zu gewinnen.

Literatur

- [1] J. Berstel. *Transductions and Context-Free Languages*. Teubner Verlag, 1979.
- [2] S. Eilenberg. *Automata, Languages, and Machines*, vol. A. *Academic Press, New York*, 1974.
- [3] C.C. Elgot and J.E. Mezei. On Finite Relations Defined by Generalized Automata. *IBM Journal of Research and Development*, 9:47–68, 1965.
- [4] M. Nivat. Transductions des langages de Chomsky. *Ann. Inst. Fourier*, 18(1):339–456, 1968.
- [5] M.P. Schützenberger. Sur les relations rationnelles. In *Proceedings of the 2nd GI Conference on Automata Theory and Formal Languages*, pages 209–213. Springer-Verlag London, UK, 1975.